

**Q1: 複素数ってなんですか。**

まず虚数単位について簡単に説明します。

2乗して-1になる新しい数を考え、これを文字  $i$  で表します。つまり  $i^2 = -1$  となります。

この  $i$  を虚数単位といいます。

次に複素数についてですが、 $a, b$ (実数)として、 $a+bi$  の形に表せる新しい種類の数を複素数といいます。なお、虚数が実数と異なるところは、 $i^2 = -1 < 0$  からも分かるように虚数では実数と同じような大小関係や、正、負の考え方が出来ません。

問 次のような実数  $x, y$  を求めてください。

$$(-2 + 2i)x + (4 - 3i)y = 4i - 2$$

(ヒント)  $a + bi = c + di$  ならば  $a = c$ かつ  $b = d$

解答  $x = 5, y = 2$

**Q2:  $\log_a x$  ってどんな意味ですか。**

指数関数  $y = a^x$ において、任意の正の数  $y$  に対して  $x$  がただ1つ決まる。そこで、 $x$  と  $y$  を交換し、 $y$  について解くと  $y = \log_a x$  となり、 $y$  は  $x$  の関数となる。この関数(指数関数の逆関数)を  $a$  を底とする  $x$  の対数関数という。

問 次の方程式を解いてください。

$$3 = \log_2 x$$

(ヒント)  $x = a^y$  と  $y = \log_a x$  は同じです。

解答  $x = 8$

**Q3: 空間ベクトルについて教えてください**

風の速度とか力といったベクトルは本来空間の中で考えるのが普通です。そこで空間という広がりの中で空間ベクトルを考えます。

空間の場合も平面の場合と全く同じように、ベクトルは大きさと向きという2つの要素を持ったのですが、成分表示すると  $\vec{a} = (x, y, z)$  のようになります。

問  $\vec{a} = (1, -1, 2), \vec{b} = (3, 1, -1)$  のとき  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  のベクトルを成分で表し、また大きさを求めてください。

(ヒント) 平面ベクトルと同じように出来ます。

解答  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (11, 1, 1) \quad |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{123}$

**Q4: 微分の定義を教えてください。**

まず最初に平均変化率について説明します。

関数に  $y = f(x)$  において、 $x$  が  $a$  から  $b$  まで変化するとき  $x$  の変化量  $b - a$  に対する  $y$  の変化量の割合

$$\frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を、 $x$  が  $a$  から  $b$  まで変化するときの関数  $f(x)$  の平均変化率という

次に  $b = a + h$  とすると  $b$  を  $a$  に限りなく近づけると、 $h$  が限りなく 0 に近づく  
このとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$x = a$  における微分係数という。(これは  $x = a$  における接線の傾き)

このとき  $a$  の値を 1つ決めると、それに対応して、 $f'(a)$  の値がただ 1つ決まるので、 $f'(a)$  は  $a$  の関数といえる。

このとき  $a$  の代わりに  $x$  を書き改めた式を導関数という  
つまり

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (\text{微分の定義})$$

問  $f(x) = x^2 + 2x + 6$  を定義に基づいて微分してください。

解答  $f'(x) = 2x + 2$

**Q5: 行列ってなんですか。**

座標平面上の点の位置は(3, 2)、座標空間の点の位置は(1,2,-8)のように表されます。このように、いくつかの数を長方形の形に書き並べ、両側を括弧で囲んだものを、行列といいます。そして、行列の横の並びを行、縦の並びを列といいます。

たとえば 2 行 2 列の行列  $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  3 行 2 列の行列  $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  などです。

問 次の等式が成り立つように、定数  $a, b, c$  の値を求めてください。

$$\begin{pmatrix} 2a + b & 1 \\ 2 & c - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b + c \\ a + b - c & -3 \end{pmatrix}$$

(ヒント)  $\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  ならば  $x = a, y = b, z = c, w = d$

解答  $a = -1, b = 2, c = -1$

**Q6: 三角関数の倍角、半角の公式について教えてください。**

三角関数の加法定理より導くことが出来る。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

において  $\alpha = \beta = \theta$  とすると

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

また上式より  $\theta = \frac{\theta}{2}$  とおくと

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2}\end{aligned}$$

問  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  のとき次の式の値を求めてください。ただし、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(1)  $\sin 2\theta$

(2)  $\cos \frac{\theta}{2}$

解答 (1)  $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$       (2)  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

**Q7: 階差数列ってどんな数列ですか。**

数列を作る規則が簡単に分からぬ時、階差数列を利用してみる。

数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とすると  $b_n = a_{n+1} - a_n$  より階差数列  $\{b_n\}$  の一般項が分かれれば  $\{a_n\}$

は  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$  より求められる。

問 次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

1, 6, 17, 34, 57, ·····

解答  $a_n = 3n^2 - 4n + 2$

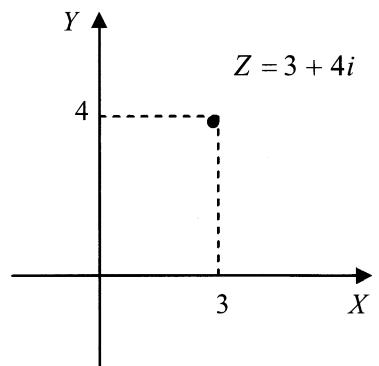
**Q8:複素平面(ガウス平面)ってどんな平面ですか。**

複素数  $Z = X + Yi$  に点(X, Y)を対応させる。X 軸を実軸、Y 軸を虚軸という。

複素数の絶対値  $|Z|$  とは  $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$  である。

問  $Z = 3 + 4i$  の点を図示してください。また  $|Z|$  を求めてください。

解答  $|Z| = 5$



**Q9:合成関数の微分ってどんな微分ですか。**

$x$  の関数を、 $y$ を  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  とみて、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

つまり

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

問  $y = \sqrt{2x^2 + 3}$  を微分してください。

解答  $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

**Q10:置換積分ってどんな積分ですか。**

$y = \int f(x)dx$ において、 $x = g(t)$  とすると、 $y$  は  $x$  の関数で、 $x$  は  $t$  の関数です。

合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

よって  $y = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$  となり

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

問 次の不定積分を求めてください。

$$\int \sqrt{3x - 1} dx$$

解答  $\frac{2}{9}(3x - 1)\sqrt{3x - 1} + c$